

基于比率依赖的两种群捕食者—食饵系统的随机模型的渐近性质*

史超¹, 谭杨², 郭子君¹

(1. 华南农业大学应用数学研究所, 广东 广州 510642;
2. 铜仁职业技术学院, 贵州 铜仁 554300)

摘要: 在考虑有随机干扰的情况下, 对基于比率依赖的两种群捕食者—食饵系统的性质进行了研究。首先通过随机微分方程理论建立此系统的随机模型, 并利用构造 V 函数, 结合停时、常用不等式、Itô 公式等技巧和方法对此系统的性质进行了讨论。最后, 在假设条件下, 得到了基于比率依赖的两种群捕食者—食饵系统的随机最终有界、解的渐近矩估计和轨道估计等性质。

关键词: 捕食者—食饵系统; 随机微分方程; Itô 公式; 随机最终有界; 渐近矩估计; 轨道估计

中图分类号: O211.63, O175.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2013) 03-0067-06

Asymptotic Behavior of a Stochastic Models on Predator-prey System of Two Species with Ratio-dependence

SHI Chao¹, TAN Yang², GUO Zijun¹

(1. Institute of Applied Mathematics, South-China Agricultural University, Guangzhou 510642, China;
2. Tongren Polytechnic College, Tongren 554300, China)

Abstract: A stochastic models on predator-prey system of two species with ratio-dependence is studied. The property of stochastic ultimate boundedness, the asymptotic moment estimation and the pathwise estimation of the global solution are studied by five techniques, including the theory on stochastic differential equation constructs stochastic models, the V function, stopping time, some inequalities and Itô formula.

Key words: predator-prey system; stochastic differential equation; Itô formula; stochastic ultimate boundedness; asymptotic moment estimation; pathwise estimation

生物种群的状态特征分析是数学生态学的中心工作之一。在数学生态学的研究中, 种群的持续生存一直以来都是一个很受关注的重要问题。自从 Lotka 和 Volterra 提出标准的两种群 Lotka-Volterra 系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)(b_1 + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)(b_2 + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)) \end{cases} \quad (1)$$

以来, 已经有很多学者对此进行了大量的研究, 并

得到了很多研究成果。对于这个系统, 如果其中的 $a_{12} > 0, a_{21} < 0$, 这就是标准的 Lotka-Volterra 型捕食者—食饵系统。近年来根据生物学和生理学中研究的数据表明: 一个合乎实际且一般的捕食者—食饵系统模型应基于“比率依赖”理论。所谓“比率依赖”是指捕食者种群的平均增长率应与食饵种群密度及捕食者种群密度之比的函数有关。基于比率依赖的捕食者—食饵系统模型越来越受到数学生态学工作者的重视, 在文 [1] 中 Arditi 和

* 收稿日期: 2012-11-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (30971694)

作者简介: 史超 (1988 年生), 男, 硕士生; 通讯作者: 郭子君; E-mail: zijunguo@scau.edu.cn

Ginzburg 最早研究了基于比率依赖的捕食者 - 食饵系统模型, 在文 [2] 中研究了基于比率依赖的具时滞的捕食者 - 食饵系统解的周期性, 在文 [3] 中研究了在有时滞的情况下两种群基于比率依赖的捕食者 - 食饵系统的全局稳定性和持续生存的条件, 而文 [4] 则研究了在有时滞的情况下多种群基于比率依赖的捕食者 - 食饵系统的全局稳定性和持续生存的条件。

一般地, 种群系统所处的环境是随机变化的, 环境中的许多因素都随时间的改变而随机地变化, 种群系统状态也就会受到环境随机噪声的影响。因此我们必须考虑种群系统所处环境的随机性, 随机微分方程理论给我们提供了随机环境下两种群捕食者 - 食饵系统分析的重要理论基础。文献 [5] 研究了随机 Lotka-Volterra 模型的性质, 文 [6] 研究了环境噪声下两种群系统的稳定性和有界性, 文 [7] 研究了在有时滞的情况下随机捕食者 - 食饵系统的全局正解、随机最终有界等性质, 文 [8] 研究了在有时滞的情况下随机多种群系统的全局正解、随机最终有界和渐近稳定等性质。在文 [9] 中, 我们研究了基于比率依赖的两种群捕食者 - 食饵的随机系统, 得到了全局正解和解的有界性。到目前为止, 还没有文献涉及到基于比率依赖的随机两种群捕食者 - 食饵系统解的渐近性质。

在本文中, 我们运用随机微分方程的理论来讨论随机环境下基于比率依赖的两种群捕食者 - 食饵系统解的几个渐近性质。

1 基础知识

给定装有滤子 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ (满足通常条件 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 右连续且 \circ 包含所有 P -零测集), 种群系统所处环境的随机性用概率空间上的一维 Brownian 运动 $w(t)$ 来表示。当 A 是向量或者矩阵时, A^T 表示其转置, $|A| = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$, 记 $\mathbf{R}_+^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ 。考虑如下基于比率依赖的两种群捕食者 - 食饵随机模型

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_1(t) \left(a - bx_1(t) - \frac{cx_2(t)}{mx_2(t) + x_1(t)} \right) dt + \\ \quad x_1(t) (\sigma_{11}x_1(t) + \sigma_{12}x_2(t)) dw(t), \\ dx_2(t) = x_2(t) \left(-d + \frac{px_1(t)}{mx_2(t) + x_1(t)} \right) dt + \\ \quad x_2(t) (\sigma_{21}x_1(t) + \sigma_{22}x_2(t)) dw(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 a, b, c, d, p, m 为正常数, $\sigma = (\sigma_{ij})_{2 \times 2}$ 是随机噪声密度系数矩阵。为讨论随机干扰对种群系统的影响, 假设 $(H_1) \sigma_{11} > 0, \sigma_{22} > 0, \sigma_{12} \geq 0, \sigma_{21} \geq 0$ 。在文献 [9] 中, 我们证明了关于模型 (2) 解的存在唯一性的如下定理。

定理 1 假设 (H_1) 成立, $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) \in \mathbf{R}_+^2$, 则随机微分方程 (2) 存在唯一整体解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, 并且依概率 1 有 $x(t) \in \mathbf{R}_+^2, \forall t \geq 0$ 。

在模型 (2) 中, 若取

$a = 0.1, b = 0.05, c = 0.02, m = 0.4, d = 0.08, p = 0.01, \sigma_{11} = 0.01, \sigma_{12} = 0.02, \sigma_{21} = 0.02, \sigma_{22} = 0.01$, 易验证假设条件 (H_1) 成立, 取初值 $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (5, 5)$, 步长 $\Delta t = 0.001$, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的轨道模拟图如图 1 所示。

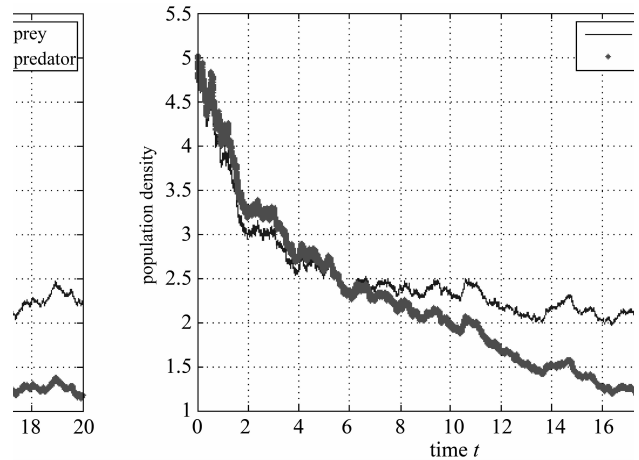


图 1 假设 (H_1) 下模型的全局解的轨道模拟

Fig. 1 The pathwise of the global solution of (1) under the hypothesis (H_1)

定理 1 和图 1 都说明了系统 (2) 中所研究生物种群受到随机环境干扰时, 不论这个干扰多么小, 模型 (2) 都不会出现爆炸解。

2 随机最终有界

在本节中, 我们将讨论系统 (2) 的随机最终有界性质。首先我们给出随机最终有界的定义^[8]:

定义 2 称系统 (2) 为随机最终有界的, 如果对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在一个正常数 $H = H(\varepsilon)$, 使得对于任意给定的初始值 $x(0) \in \mathbf{R}_+^2$, 模型 (2) 的解 $x(t)$ 满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{ |x(t)| \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$$

随机最终有界说的是种群规模在大概率下低于某个值，不会发生爆发。下面给出它的证明。

引理 3 假设 (H_1) 成立，对 $\forall \theta \in (0, 1)$ ，模型 (2) 的解满足 $\limsup_{t \rightarrow \infty} E|x(t)|^\theta \leq K$ ，其中 K 是与 θ 有关的正常数。

证明 定义 $V(x(t)) = x_1^\theta(t) + x_2^\theta(t)$ 。由 Itô 公式得

$$\begin{aligned} dV(x(t)) = & \left[\theta x_1^{\theta-1}(t) (a - bx_1(t) - \frac{cx_2(t)}{mx_2(t) + x_1(t)}) + \right. \\ & \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) x_1^\theta(t) (\sigma_{11} x_1(t) + \sigma_{12} x_2(t))^2 + \\ & \theta x_2^\theta(t) (-d + \frac{px_1(t)}{mx_2(t) + x_1(t)}) + \\ & \left. \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) x_2^\theta(t) (\sigma_{21} x_1(t) + \sigma_{22} x_2(t))^2 \right] dt + \\ & \sum_{i=1}^2 \theta x_i^{\theta-1}(t) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} x_j(t) dw(t) \end{aligned} \quad (3)$$

再次使用 Itô 公式得

$$\begin{aligned} d[e^t V(x(t))] = & e^t V(x(t)) dt + e^t dV(x(t)) = \\ & [e^t (LV(x(t)) + V(x(t)))] dt + \\ & e^t \sum_{i=1}^2 \theta x_i^{\theta-1}(t) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} x_j(t) dw(t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中：

$$\begin{aligned} LV(x(t)) = & \theta x_1^{\theta-1}(t) (a - bx_1(t) - \frac{cx_2(t)}{mx_2(t) + x_1(t)}) + \\ & \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) x_1^\theta(t) (\sigma_{11} x_1(t) + \sigma_{12} x_2(t))^2 + \\ & \theta x_2^\theta(t) (-d + \frac{px_1(t)}{mx_2(t) + x_1(t)}) + \\ & \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) x_2^\theta(t) (\sigma_{21} x_1(t) + \sigma_{22} x_2(t))^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} LV(x(t)) + V(x(t)) = & \theta x_1^{\theta-1}(t) (a - bx_1(t) - \\ & \frac{cx_2(t)}{mx_2(t) + x_1(t)}) + \\ & \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) x_1^\theta(t) (\sigma_{11} x_1(t) + \sigma_{12} x_2(t))^2 + \\ & \theta x_2^\theta(t) (-d + \frac{px_1(t)}{mx_2(t) + x_1(t)}) + \frac{1}{2} \theta(\theta - 1) x_2^\theta(t) \\ & (\sigma_{21} x_1(t) + \sigma_{22} x_2(t))^2 + x_1^\theta(t) + x_2^\theta(t) \leq k \end{aligned} \quad (6)$$

对每个整数 $n \geq |x(0)|$ ，定义停时 $\rho_n = \inf\{t \in \mathbf{R}^+ : |x(t)| \geq n\}$ ，

于是有

$$\begin{aligned} E(e^t V(x(t \wedge \rho_n))) = & V(x(0)) + \\ & E \int_0^{t \wedge \rho_n} e^s (LV(x(s)) + V(x(s))) ds \end{aligned} \quad (7)$$

由式 (6) - (7) 得

$$e^t E(V(x(t \wedge \rho_n))) \leq V(x(0)) + ke^t \quad (8)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$e^t E(V(x(t))) \leq V(x(0)) + ke^t$$

两边同时除以 e^t ，得

$$E V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-t} + k$$

对任意的 $x_i > 0 (i = 1, 2)$ ，有

$$(x_1^2 + x_2^2)^{\theta/2} \leq 2^{\theta/2} \max(x_1^\theta, x_2^\theta) \leq 2^{\theta/2} V(x(t))$$

得

$$E|x(t)|^\theta \leq 2^{\theta/2} E V(x(t)) \leq 2^{\theta/2} V(x(0)) e^{-t} + 2^{\theta/2} k$$

于是有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E|x(t)|^\theta \leq 2^{\theta/2} k = K \quad (9)$$

定理 4 假设 (H_1) 成立，则模型 (2) 的解满足 $\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|x(t)| \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$ 。

证明 在引理 3 中令 $\theta = 1/2$ ，存在 $M > 0$ 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E(\sqrt{|x(t)|}) \leq M \quad (10)$$

对任意的 $\varepsilon > 0$ ，令 $H = M^2/\varepsilon^2$ ，则由 Chebyshev 不等式有

$$P\{|x(t)| > H\} \leq \frac{E(\sqrt{|x(t)|})}{\sqrt{H}} \quad (11)$$

于是

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|x(t)| > H\} \leq \frac{M}{\sqrt{H}} = \varepsilon$$

即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|x(t)| \leq H\} \geq 1 - \varepsilon \quad (12)$$

证毕。

由引理 3 和定理 4 可称系统 (2) 是随机最终有界的。

3 渐近矩估计

由于无法获得解析解，渐近矩估计说明的是解的平均值（相对时间 t ）的变化特征。

对于模型 (2)，我们有关于渐近矩估计定理如下。

定理 5 假设 (H_1) 成立，对于任给的 $\theta \in (0, 1)$ ，都存在一个正常数 K_θ ，使得对任给的初值 $x(0) \in \mathbf{R}_+^2$ ，模型 (2) 的解满足 $\limsup_{t \rightarrow \infty}$

$$\frac{1}{t} E \left[\int_0^t \sum_{i=1}^2 x_i^{2+\theta}(s) ds \right] \leq K_\theta.$$

证明 在式 (3) 中，容易得

$$\theta x_1^{\theta-1}(t) (a - bx_1(t) - \frac{cx_2(t)}{mx_2(t) + x_1(t)}) \leq a \theta x_1^{\theta-1}(t) \quad (13)$$

$$\theta x_2^\theta(t) \left(-d + \frac{px_1(t)}{mx_2(t) + x_1(t)} \right) \leq \frac{p\theta x_1(t)x_2^\theta(t)}{mx_2(t) + x_1(t)} \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^2 \theta(1-\theta)x_i^\theta(t) \left(\sum_{j=1}^2 x_j(t)\sigma_{ij} \right)^2 \geq \sum_{i=1}^2 \theta(1-\theta)x_i^{2+\theta}(t)\sigma_{ii}^2 \quad (15)$$

由式 (13) - (15) 得

$$dV(x(t)) \leq \left[a\theta x_1^\theta(t) + \frac{p\theta x_1(t)x_2^\theta(t)}{mx_2(t) + x_1(t)} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \theta(1-\theta)x_i^{2+\theta}(t)\sigma_{ii}^2 \right] dt + \sum_{i=1}^2 \theta x_i^\theta(t) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} x_j(t) dw(t) \quad (16)$$

由于多项式 $a\theta x_1^\theta(t) + \frac{p\theta x_1(t)x_2^\theta(t)}{mx_2(t) + x_1(t)} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \theta(1-\theta)x_i^{2+\theta}(t)\sigma_{ii}^2$ 有一个正的上界 K , 改写不等式 (16) 并在两边同时积分得

$$V(x(t)) + \frac{1}{4}\theta(1-\theta) \int_0^t \sum_{i=1}^2 x_i^{2+\theta}(s)\sigma_{ii}^2 ds \leq V(x(0)) + \int_0^t K ds + M(t) \quad (17)$$

其中 $M(t) = \theta \int_0^t \sum_{i=1}^2 x_i^\theta(s) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} x_j(s) dw(s)$ 是一个实值连续的局部鞅, 且 $M(0) = 0$ 。在式 (17) 两边取期望得到

$$E \left[\int_0^t \sum_{i=1}^2 x_i^{2+\theta}(s) ds \right] \leq \frac{4}{\hat{\sigma}\theta(1-\theta)} (V(x(0)) + Kt) \quad (18)$$

其中 $\hat{\sigma} = \min\{\sigma_{ii}^2, 1 \leq i \leq 2\}$ 。

两边同时除以 t 得到

$$\frac{1}{t} E \left[\int_0^t \sum_{i=1}^2 x_i^{2+\theta}(s) ds \right] \leq \frac{4}{\hat{\sigma}\theta(1-\theta)t} (V(x(0)) + Kt) \quad (19)$$

则有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left[\int_0^t \sum_{i=1}^2 x_i^{2+\theta}(s) ds \right] \leq \frac{4K}{\hat{\sigma}\theta(1-\theta)} = K_\theta \quad (20)$$

因此得证。

4 轨道估计

由于无法获得解析解, 轨道估计说明的是依概率 1 下, 解 (轨道) (相对时间 t) 的变化特征。对于模型 (2), 我们有关于轨道估计定理如下。

定理 6 假设 (H_1) 成立, 对于任给的初值

$$x(0) \in \mathbf{R}_+^2, \text{ 有 } \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\prod_{i=1}^2 x_i(t) \right)}{\ln(t)} \leq 2 \text{ a. s. }。$$

证明 对每个 $i = 1, 2$, 当 $\gamma > 0$ 时对 $e^{\gamma \ln(x_i(t))}$ 应用 Itô 公式并积分, 有

$$e^{\gamma \ln(x_1(t))} = \ln(x_1(0)) + \int_0^t e^{\gamma s} [a - bx_1(s) - \frac{cx_2(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{1j} x_j(s) \right)^2] ds + \gamma \int_0^t e^{\gamma s} \ln(x_1(s)) ds + M_1(t) \quad (21)$$

$$e^{\gamma \ln(x_2(t))} = \ln(x_2(0)) + \int_0^t e^{\gamma s} [-d +$$

$$\frac{px_1(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{2j} x_j(s) \right)^2] ds + \gamma \int_0^t e^{\gamma s} \ln(x_2(s)) ds + M_2(t) \quad (22)$$

其中 $M_i(t) = \int_0^t e^{\gamma s} \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} x_j(s) dw(s)$ ($i = 1, 2$) 是实值连续的局部鞅, 且 $M(0) = 0$, 其二次变差过程为

$$\langle M_i(t), M_i(t) \rangle = \int_0^t e^{2\gamma s} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} x_j(s) \right)^2 ds$$

给定任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $\theta > 1$, 对于每一个正数 $k \geq 1$, 根据指数鞅不等式有

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq k} [M_i(t) - \frac{\varepsilon}{2} e^{-\gamma k}] \right.$$

$$\left. \langle M_i(t), M_i(t) \rangle > \frac{\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k \right\} \leq \frac{1}{k^\theta}$$

由 Borel-Cantelli 引理可知, 存在 $\Omega_i \subset \Omega$ 满足 $P(\Omega_i) = 1$, ($i = 1, 2$) 且对任意的 $\omega \in \Omega_i$ 能找到一个整数 $k_i = k_i(\omega)$ ($i = 1, 2$) 使得, 对所有的 $0 \leq t \leq k$ 和 $k \geq k_i(\omega)$ 有

$$M_i(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} e^{-\gamma k} \langle M_i(t), M_i(t) \rangle + \frac{\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k$$

则方程 (21) - (22) 可变为

$$e^{\gamma \ln(x_1(t))} \leq \ln(x_1(0)) + \int_0^t e^{\gamma s} [a - bx_1(s) - \frac{cx_2(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{1j} x_j(s) \right)^2] ds + \gamma \int_0^t e^{\gamma s} \ln(x_1(s)) ds +$$

$$\frac{\varepsilon}{2} e^{-\gamma k} \int_0^t e^{2\gamma s} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{1j} x_j(s) \right)^2 ds + \frac{\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k \quad (23)$$

$$e^{\gamma \ln(x_2(t))} \leq \ln(x_2(0)) + \int_0^t e^{\gamma s} [-d +$$

$$\frac{px_1(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{2j} x_j(s) \right)^2] ds +$$

$$\gamma \int_0^t e^{\gamma s} \ln(x_2(s)) ds + \frac{\varepsilon}{2} e^{-\gamma k} \int_0^t e^{2\gamma s} \cdot \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{2j} x_j(s) \right)^2 ds + \frac{\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k \quad (24)$$

对于任意的 $\omega \in \Omega_i (i = 1, 2)$ ，当 $0 \leq t \leq k$ 和 $k \geq k_i(\omega) (i = 1, 2)$ 时，式 (23) - (24) 可以改写成

$$e^{\gamma t} \ln(x_1(t)) \leq \ln(x_1(0)) + \int_0^t e^{\gamma s} [a - bx_1(s) - \frac{cx_2(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - \frac{1 - \varepsilon e^{-\gamma(k-s)}}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{1j} x_j(s) \right)^2] ds + \gamma \int_0^t e^{\gamma s} \ln(x_1(s)) ds + \frac{\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k \quad (25)$$

$$e^{\gamma t} \ln(x_2(t)) \leq \ln(x_2(0)) + \int_0^t e^{\gamma s} [-d + \frac{px_1(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - \frac{1 - \varepsilon e^{-\gamma(k-s)}}{2} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{2j} x_j(s) \right)^2] ds + \gamma \int_0^t e^{\gamma s} \ln(x_2(s)) ds + \frac{\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k \quad (26)$$

令 $\Omega_0 = \cap_{i=1}^2 \Omega_i$ ，显然有 $P(\Omega_0) = 1$ ，而且对于任意的 $\omega \in \Omega_0$ ，当 $0 \leq t \leq k$ 和 $k \geq k_0(\omega) = \max\{k_i(\omega) : 1 \leq i \leq 2\}$ 时，由式 (25) - (26) 可得出

$$e^{\gamma t} \sum_{i=1}^2 \ln(x_i(t)) \leq \sum_{i=1}^2 \ln(x_i(0)) + \gamma \int_0^t e^{\gamma s} \sum_{i=1}^2 \ln(x_i(s)) ds + \frac{2\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k +$$

$$\int_0^t e^{\gamma s} \left\{ a - bx_1(s) - \frac{cx_2(s) - px_1(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - d - \frac{1 - \varepsilon e^{-\gamma(k-s)}}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{1j} x_j(s) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{2j} x_j(s) \right)^2 \right] \right\} ds$$

存在正常数 K ，使

$$a - bx_1(s) - \frac{cx_2(s) - px_1(s)}{mx_2(s) + x_1(s)} - d - \frac{1 - \varepsilon e^{-\gamma(k-s)}}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{1j} x_j(s) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{2j} x_j(s) \right)^2 \right] + \gamma \sum_{i=1}^2 \ln(x_i(s)) \leq K$$

对任意的 $x \in \mathbf{R}_+^2$ ，当 $0 \leq t \leq k$ 和 $k \geq k_0(\omega)$ 时，我们有

$$e^{\gamma t} \sum_{i=1}^2 \ln(x_i(t)) \leq \sum_{i=1}^2 \ln(x_i(0)) + \frac{K}{\gamma} e^{\gamma t} - \frac{K}{\gamma} + \frac{2\theta e^{\gamma k}}{\varepsilon} \ln k \quad (27)$$

因此，对于任意给定的 $\omega \in \Omega_0$ ，如果 $k - 1 \leq t \leq k$ 和 $k \geq k_0(\omega)$

$$\frac{\ln\left(\prod_{i=1}^2(x_i(t))\right)}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(k-1)} \left[e^{-\gamma(k-1)} \cdot \ln\left(\prod_{i=1}^2(x_i(0))\right) + \frac{K}{\gamma} + \frac{2\theta e^{\gamma}}{\varepsilon} \ln k \right] \quad (28)$$

则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\prod_{i=1}^2(x_i(t))\right)}{\ln(t)} \leq \frac{2\theta e^{\gamma}}{\varepsilon} \quad (29)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 1, \theta \rightarrow 1$ 和 $\gamma \rightarrow 0$ ，有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\prod_{i=1}^2(x_i(t))\right)}{\ln(t)} \leq 2 a. s.$ 。因此得证。

在模型 (2) 中，取两组值，

第一组值： $a = 0.08, b = 0.03, c = 0.02, m = 0.02, d = 0.03, p = 0.01, \sigma_{11} = 0.02, \sigma_{12} = 0.01, \sigma_{21} = 0.03, \sigma_{22} = 0.025$ ；

第二组值： $a = 0.1, b = 0.05, c = 0.02, m = 0.4, d = 0.08, p = 0.01, \sigma_{11} = 0.01, \sigma_{12} = 0, \sigma_{21} = 0, \sigma_{22} = 0.01$ ，

易验证两组值都能使假设条件 (H_1) 成立，取初值 $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (3, 3)$ ，步长 $\Delta t = 0.001$ ，在这两组值下有 $\frac{\ln\left(\prod_{i=1}^2(x_i(t))\right)}{\ln(t)}$ 的轨道模拟图如图 2 所示。

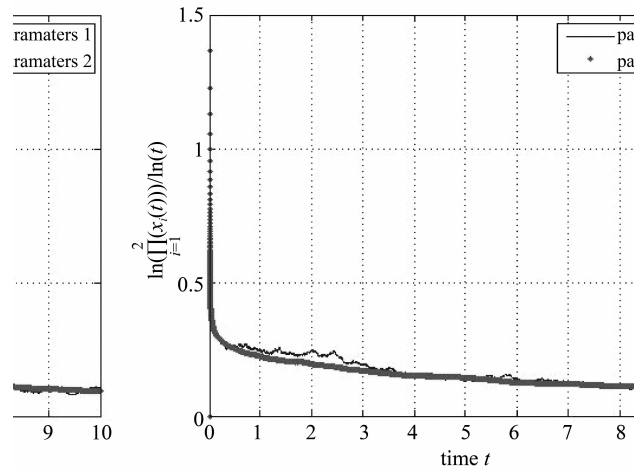


图 2 假设 (H_1) 下 $\ln\left(\prod_{i=1}^2(x_i(t))\right)/\ln(t)$ 轨道模拟

Fig. 2 The pathwise of $\ln\left(\prod_{i=1}^2(x_i(t))\right)/\ln(t)$ under the hypothesis (H_1)

参考文献:

- [1] ARDITI R, GINZBURG L R. Coupling in predator-prey dynamics; ratio-dependence [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1989, 139:311 – 326.
- [2] FAN M, WANG K. Periodicity in a delayed ratio-dependent predator-prey system [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, 262:179-190.
- [3] XU R, DAVIDSON F A, CHAPLAIN M A J. Persistence and stability for a two-species ratio-dependent predator-prey system with distributed time delay [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 269:256 – 277.
- [4] XU R, CHEN L S. Persistence and global stability for n-species ratio-dependent predator-prey system with time delays [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 275:27 – 43.
- [5] MAO X R, SABANIS S, ERIC R. Asymptotic behavior of the stochastic Lotka-Volterra model [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, 287:141 – 156.
- [6] MAO X R, GLENN M, ERIC R. Environment Brownian noise suppresses explosions in population dynamics [J]. *Stochastic Processes and Their Application*, 2002, 97:95 – 110.
- [7] ARIFAH B, MAO X R. Stochastic delay Lotka-Volterra model [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 292:364 – 380.
- [8] MAO X R, YUAN C G, ZOU J Z. Stochastic differential delay equations of population dynamics [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 304:296 – 320.
- [9] 郭子君. 基于比率依赖的两种群捕食者 – 食饵系统的随机模型 [J]. *中山大学学报:自然科学版*, 2010, 49 (2):48 – 53.
- [3] GABOR D. Theory of communications [J]. *Journal Institute of Electrical Engineers*, 1946, 93: 429 – 457.
- [4] VILLE J. Théorie et applications de la notion de signal analytique [J]. *Cables et Transmissions*, 1948, 2: 61 – 74.
- [5] BOASHASH B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1992, 80: 520 – 538.
- [6] COHEN L. Time-frequency analysis [M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- [7] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis [J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1998, 454: 903 – 995.
- [8] BROWN J. A Hilbert transform product theorem [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1986, 74: 520 – 521.
- [9] TAN L H, YANG L H, HUANG D R. Construction of periodic analytic signals satisfying the circular Bedrosian identity [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2010, 75(2): 246 – 256.
- [10] GARNETT J B. Bounded analytic function [M]. New York:Academic Press, 1987.
- [11] TAN L H, YANG L H, HUANG D R. The structure of instantaneous frequencies of periodic analytic signals [J]. *Science China:Series A*, 2010, 53(2): 347 – 355.
- [12] OPPENHEIM A V, SCHAFER R W. Discrete-time signal processing [M]. New Jersey:Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

(上接第 66 页)